

## Proves d'accés a la universitat

---

# Matemàtiques

## Sèrie 2

Qualificació		TR
Qüestions	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
Suma de notes parcials		
Qualificació final		

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

---

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

---

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

---

1. Considereu la paràbola  $y = 4 - x^2$  i un valor  $a > 0$ .
  - a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa  $x = a$  és  $y = -2ax + a^2 + 4$  i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.

[1,25 punts]

**b)** Calculeu el valor de  $a > 0$  perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	<b>a</b>	
	<b>b</b>	
	Total	

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real  $p$ :

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

**a)** Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre  $p$ .  
[1,5 punts]

**b)** Resoleu, si és possible, el sistema per al cas  $p = 2$ .  
[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

3. Considereu el punt  $P = (-1, 3, 1)$ , el pla  $\pi: x = y$  i la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$ .

a) Trobeu les coordenades del punt  $P'$  simètric a  $P$  respecte al pla  $\pi$ .

[1,25 punts]

- b)** De tots els plans que contenen la recta  $r$ , trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla  $\pi$ .  
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	<b>a</b>	
	<b>b</b>	
	Total	

4. Sigui la funció  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$  definida en el domini  $x > 0$ , en què  $\ln$  és el logaritme neperià.
- a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba  $y = f(x)$  en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.  
[1 punt]

- b) Determineu si la funció  $f(x)$  té alguna asímptota horitzontal.  
[0,5 punts]



- c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba  $y=f(x)$  i les rectes  $x=1$  i  $x=e$ . Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini  $0 < x < 5$ , en què quedi representada l'àrea que heu calculat.

[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	<i>c</i>	
	Total	

5. *a)* Donada la matriu  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , resoleu l'equació matricial  $\mathbf{A}^2 \mathbf{X} = \mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ , en què

$\mathbf{I}$  és la matriu identitat.

[1,25 punts]

- b) Una matriu quadrada  $M$  satisfà que  $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$ , en què  $I$  és la matriu identitat. Justifiqueu que  $M$  és invertible i expresseu la inversa de  $M$  en funció de les matrius  $M$  i  $I$ .

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

6. Considereu la funció  $f(x) = e^{x-1} - x - 1$ .
- a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.
- [1,25 punts]

- b)** Demostreu que l'equació  $f(x) = 0$  té exactament dues solucions entre  $x = -1$  i  $x = 3$ .  
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

--	--

--	--

Etiqueta de l'alumne/a



Institut  
d'Estudis  
Catalans





## Proves d'accés a la universitat

---

# Matemàtiques

## Sèrie 5

Qualificació		TR
Qüestions	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
Suma de notes parcials		
Qualificació final		

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

---

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

---

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

---

1. Considereu les matrius  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  i  $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

a) Raoneu que la matriu  $B$  és invertible i després calculeu  $B^{-1}$ .

[1,25 punts]

- b)** Calculeu la matriu  $X$  que satisfà la igualtat  $A + B \cdot X = C \cdot A$ .  
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	<b>a</b>	
	<b>b</b>	
	Total	

2. Siguin les funcions  $f(x) = x^3 - 9x$  i  $g(x) = 7x$ .
- a) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de  $f(x)$ .
- [1,25 punts]

- b)** Calculeu l'àrea de la regió del semiplà  $x \geq 0$  compresa entre les gràfiques de  $f(x)$  i  $g(x)$ .  
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

3. Considereu els punts de l'espai tridimensional  $A = (1, a, 1)$ ,  $B = (a, 1, 2)$ ,  $C = (1, 1, 1)$  i  $D = (0, 0, 0)$ , en què  $a$  és un paràmetre real.
- a)** Determineu el valor del paràmetre  $a$  per al qual els punts són diferents i coplanaris (és a dir, que hi ha un pla que els conté).
- [1,25 punts]

b) Per al valor  $a = 2$ , calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

[1,25 punts]

NOTA: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$ , podeu fer servir

l'expressió  $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ , en què  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  és el producte vectorial dels vectors

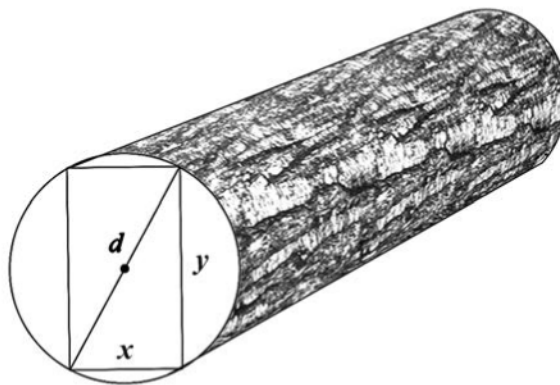
$\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$ .

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	$a$	
	$b$	
	Total	

4. La resistència al trencament  $R$  d'una biga de secció rectangular de base  $x$  i altura  $y$  és directament proporcional al producte  $xy^2$ ; per tant,  $R = kxy^2$ , en què  $k$  és una constant positiva. Disposem d'un tronc de fusta en forma de cilindre de diàmetre  $d$  com el de la figura.

a) Comproveu que la resistència  $R$  de la biga rectangular de base  $x$  que podem construir amb aquest tronc ve donada per l'expressió  $R = kx(d^2 - x^2)$ .

[1,25 punts]





- b)* Calculeu les dimensions de la biga rectangular de resistència màxima que podem construir a partir d'aquest tronc i calculeu aquesta resistència màxima.  
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

5. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real  $a$ :

$$\begin{cases} x + 2y + az = 8 \\ 2x + y - az = 1 \\ 3x - 3az = 1 \end{cases}$$

**a)** Comproveu que, per a qualsevol valor del paràmetre  $a$ , el sistema d'equacions lineals no té solució.

[1,25 punts]

**b)** Interpreteu geomètricament el sistema d'equacions lineals. Feu un dibuix esquemàtic que representi la posició relativa dels tres plans.

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

6. Resoleu les dues qüestions següents:

a) Sigui  $f(x) = 2x^3 + mx^2 + nx + p$  una funció que té dos extrems relatius en  $x = -3$  i en  $x = 1$  i que passa pel punt  $(3, 4)$ . Calculeu els valors de  $m$ ,  $n$  i  $p$ .

[1,25 punts]

- b)** Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  en  $x = -3$ .  
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

--	--

--	--

Etiqueta de l'alumne/a



Institut  
d'Estudis  
Catalans